第12講　試行錯誤の数列

12　次の各問いに答えよ．

(1)　数列 $\{a_n\}$ は $a_1=0$，$a_2=1$ を満たし，$n\geqq 2$ に対して $a_n=k$ とするとき

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_{n-k}=a_n \text{ のとき}) \\ a_n & (a_{n-k}\neq a_n \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義されるものとする．$\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n \geqq 2012$ を満たす最小の自然数 m を求めよ．

(2)　l，n，d を自然数とする．このとき自然数の積 $(2l+1)nd$ は，ある自然数 a と 2 以上の整数 m を用いて

$$(2l+1)nd=\sum_{i=1}^{m}\{a+(i-1)d\}$$

と表せることを証明せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第12講　試行錯誤の数列

12 実数 x に対して，x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す．$a_m=[\sqrt{m}]$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に対して，数列 b_1，b_2，b_3，…… を $b_1=0$，$k\geqq 2$ のとき $a_m<k\leqq a_{m+1}$ となる m に対して $b_k=m$ と定める．次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{b_k\}$ の一般項を求めよ．

(2)　すべての自然数 n に対して

$$\sum_{m=1}^{n^2} a_m+\sum_{k=1}^{n} b_k=n^3$$

が成り立つことを示せ．

(3)　$\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}[\sqrt{m}]$ を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$b_k=k^2-1$　　㋑　$b_k=k^2$　　㋒　$b_k=k^2+1$

(3)　㋐　$\dfrac{1}{6}n(4n^2-6n+8)$　　㋑　$\dfrac{1}{6}n(4n^2-3n+5)$　　㋒　$\dfrac{1}{6}n(4n^2+3n-1)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 12 講　試行錯誤の数列

12　次の各問いに答えよ．

(1)　数列 $\{a_n\}$ は $a_1=0$，$a_2=1$ を満たし，$n\geqq 2$ に対して $a_n=k$ とするとき

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_{n-k}=a_n \text{ のとき}) \\ a_n & (a_{n-k}\neq a_n \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義されるものとする．$\displaystyle\sum_{n=1}^{m}a_n\geqq 2012$ を満たす最小の自然数 m を求めよ．

(2)　l，n，d を自然数とする．このとき自然数の積 $(2l+1)nd$ は，ある自然数 a と 2 以上の整数 m を用いて

$$(2l+1)nd=\sum_{i=1}^{m}\{a+(i-1)d\}$$

と表せることを証明せよ．

【答】 (1) $m=176$　(2) 略

【解答】

(1)　まずは，正の整数 l に対して

「$a_n=l-1$ となる n は $\dfrac{l^2-l+2}{2}\leqq n\leqq\dfrac{l^2+l}{2}$

を満たす自然数だけに限る」　……①

ことを以下に証明する（提言の論拠は講義中に解説）．

(Ⅰ)　$l=1$ のとき，$a_{n+1}\geqq a_n$ と $a_2=1$ より $n\geqq 2$ なる n に対して $a_n\geqq 1$ であるので，$a_1=0$ 及び $\dfrac{l^2-l+2}{2}=1$，$\dfrac{l^2+l}{2}=1$ により①は示された．

(Ⅱ)　整数 l $(\geqq 1)$ に対して①を仮定すると，$n=\dfrac{l^2+l}{2}$ のとき $n-l+1=\dfrac{l^2-l+2}{2}$ より $a_{n-l+1}=l-1$ であるので，$a_n=a_{n-l+1}$ となり定義より $a_{n+1}=l$ である．つまり，$n=\dfrac{l^2+l}{2}+1=\dfrac{l^2+l+2}{2}$ のとき $a_n=l$ となる．

ここで，1 以上 l 以下のある自然数 i に対し，$n=\dfrac{l^2+l}{2}+i$ のとき $a_n=l$ であるとすると

$$\frac{l^2-l+2}{2}\leqq n-l\leqq\frac{l^2+l}{2}$$

より $a_{n-l}=l-1$ となり，定義より $a_n\neq a_{n-l}$ であるので $a_{n+1}=a_n=l$ となる．よって l に関し帰納的に

$$\frac{l^2+l+2}{2}\leqq n\leqq\frac{l^2+3l+2}{2}$$

のときに $a_n=l$ となり

$$n\geqq\frac{(l+1)^2+(l+1)}{2}+1 \text{ のとき } a_n>l,\quad n\leqq\frac{(l+1)^2-(l+1)+2}{2}-1 \text{ のときに } a_n<l$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

となることにより，整式 l についても①は示された．

よって数学的帰納法により，正の整数 l に対して①は成り立つ．

上記より，まずは $\displaystyle\sum_{n=1}^{\frac{l^2+l}{2}} a_n$ が 2012 以上となる l を求めると

$$\sum_{n=1}^{\frac{l^2+l}{2}} a_n = 0\times1+1\times2+\cdots\cdots+(l-1)\times l$$
$$=\frac{1}{3}(l-1)l(l+1)$$

であるから $\dfrac{1}{3}(l-1)l(l+1)\geqq 2012$ となる最小の l を求めればよいが

$$\frac{1}{3}\cdot18\cdot19\cdot20=2280$$

$$\frac{1}{3}\cdot17\cdot18\cdot19=1938$$

より，$l=19$

よって求める m は $1938+18\times\{m-(1+2+\cdots+18)\}\geqq2012$ を満たす最小の m であり，

$m=175$ のとき　$1938+18\times\{m-(1+2+\cdots+18)\}=2010$

$m=176$ のとき　$1938+18\times\{m-(1+2+\cdots+18)\}=2028$

より，求める自然数 m は　$\boldsymbol{m=176}$

(2)　$n>l$ のときは，$a=d(n-l)$，$m=2l+1$ とおき，

$n\leqq l$ のときは，$a=d(l-n+1)$，$m=2n$ とおくと，a は自然数，m は 2 以上の整数となり

a を初項，d を公差，m を項数とする等差数列の和を考えれば

$$\sum_{i=1}^{m}\{a+(i-1)d\}=\frac{m\{2a+(m-1)d\}}{2}=(2l+1)nd$$

となるので，題意は示された（a，m のおき方の発想については講義で解説）．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第12講　試行錯誤の数列

12　実数 x に対して，x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す．$a_m=[\sqrt{m}]$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に対して，数列 $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots\cdots$ を $b_1=0$，$k\geqq 2$ のとき $a_m<k\leqq a_{m+1}$ となる m に対して $b_k=m$ と定める．次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{b_k\}$ の一般項を求めよ．

(2)　すべての自然数 n に対して

$$\sum_{m=1}^{n^2} a_m+\sum_{k=1}^{n} b_k=n^3$$

が成り立つことを示せ．

(3)　$\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}[\sqrt{m}]$ を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$b_k=k^2-1$　　㋑　$b_k=k^2$　　㋒　$b_k=k^2+1$

(3)　㋐　$\dfrac{1}{6}n(4n^2-6n+8)$　　㋑　$\dfrac{1}{6}n(4n^2-3n+5)$　　㋒　$\dfrac{1}{6}n(4n^2+3n-1)$

【答】 (1) ㋐　(2) 略　(3) ㋑

【解答】

(1)　$l^2\leqq m<(l+1)^2$ $(l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき

$$l\leqq\sqrt{m}<l+1 \qquad \therefore\quad [\sqrt{m}]=l$$

よって $l^2\leqq m<(l+1)^2$ のとき $a_m=l$ となる．

ゆえに，$k\geqq 2$ のとき

$$a_m<k\leqq a_{m+1}\quad ならば\quad a_m<k,\ a_{m+1}\geqq k$$

$$m<k^2,\ k^2\leqq m+1$$

$$\therefore\quad k^2-1\leqq m<k^2$$

m は整数より，$m=k^2-1$

$\therefore$　$\boldsymbol{b_k=k^2-1}$　（これは $k=1$ のときにも成り立つ）

(2)　(1)より $a_m=l$ となる項は $2l+1$ 項あるので，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n^2} a_m&=\sum_{l=1}^{n-1} l\cdot(2l+1)+n\\&=2\sum_{l=1}^{n-1} l^2+\sum_{l=1}^{n-1} l+n\\&=\frac{n}{3}(n-1)(2n-1)+\frac{n}{2}(n-1)+n\\&=\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5)\end{aligned}$$

$a_1=1$ であるから，これは $n=1$ のときにも成り立つ．

また

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}(k^2-1)$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n$$
$$= \frac{1}{6}n(2n^2+3n-5)$$

よって

$$\sum_{m=1}^{n^2} a_m + \sum_{k=1}^{n} b_k = n^3$$

(3)　(2)より，$\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}[\sqrt{m}\,] = \sum_{m=1}^{n} a_m = \boldsymbol{\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5)}$

≪別解≫

(2)　(Ⅰ)　$n=1$ のとき，$\displaystyle\sum_{m=1}^{1} a_m + \sum_{k=1}^{1} b_k = a_1 + b_1 = 1+0=1$ 及び $1^3=1$ より，与式は成り立つ.

(Ⅱ)　$n=i$ のとき与式が成り立つと仮定すると，

(1)より $b_k=k^2-1$，$i^2 \leqq m \leqq (i+1)^2-1$ のとき $a_m=i$ であるから

$\displaystyle\sum_{m=1}^{i^2} a_m + \sum_{k=1}^{i} b_k = i^3$ より

$$\sum_{m=1}^{(i+1)^2} a_m + \sum_{k=1}^{i+1} b_k$$
$$= \sum_{m=1}^{i^2} a_m + \sum_{k=1}^{i} b_k + \sum_{m=i^2}^{(i+1)^2-1} a_m - a_{i^2} + a_{(i+1)^2} + b_{i+1}$$
$$= i^3 + \sum_{m=i^2}^{(i+1)^2-1} i - a_{i^2} + a_{(i+1)^2} + b_{i+1}$$
$$= i^3 + i(2i+1) - i + (i+1) + \{(i+1)^2-1\}$$
$$= i^3+3i^2+3i+1$$
$$= (i+1)^3$$

となり，$n=i+1$ のときにも与式は成り立つ.

よって，数学的帰納法により与式は示された.

(3)　(1)より $a_m=l$ となる項は $2l+1$ 項あるので，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{m=1}^{n^2}[\sqrt{m}\,] = \sum_{m=1}^{n^2} a_m$$
$$= \sum_{l=1}^{n-1} l(2l+1) + n$$
$$= 2\sum_{l=1}^{n-1} l^2 + \sum_{l=1}^{n-1} l + n$$
$$= \frac{n}{3}(n-1)(2n-1) + \frac{n}{2}(n-1) + n$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5)}$$

$a_1=1$ であるから，これは $n=1$ のときにも成り立つ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。